

# Уравнения

Иван Зенченко

2025

## Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>2</b>
<b>Базовая теория</b>	<b>4</b>
Условные обозначения . . . . .	4
Однозначность действий . . . . .	4
Метод весов. . . . .	4
Равносильные преобразования . . . . .	6
Законы сложения и умножения . . . . .	6
<b>Что такое уравнение?</b>	<b>9</b>
Задачи . . . . .	10
<b>Простейшие уравнения</b>	<b>11</b>
Нахождение неизвестного слагаемого: $x + a = b$ . . . . .	11
Пример . . . . .	12
Упражнения . . . . .	12
Нахождение неизвестного слагаемого: $a + x = b$ . . . . .	13
Пример . . . . .	13
Упражнения . . . . .	13
Нахождение неизвестного уменьшаемого: $x - a = b$ . . . . .	14
Пример . . . . .	15
Упражнения . . . . .	15
Нахождение неизвестного вычитаемого: $a - x = b$ . . . . .	16
Пример . . . . .	17
Упражнения . . . . .	17
Нахождение неизвестного множителя: $x \cdot a = b$ . . . . .	17
Пример . . . . .	18
Упражнения . . . . .	18
Нахождение неизвестного множителя: $a \cdot x = b$ . . . . .	19
Пример . . . . .	19

Упражнения . . . . .	19
Нахождение неизвестного делимого: $x : a = b$ . . . . .	20
Пример . . . . .	21
Упражнения . . . . .	21
Нахождение неизвестного делителя: $a : x = b$ . . . . .	22
Пример . . . . .	23
Упражнения . . . . .	23
Краткое содержание . . . . .	23
Задачи . . . . .	24
<b>Уравнения в несколько действий . . . . .</b>	<b>28</b>
Упражнения . . . . .	30
<b>Применение распределительного закона . . . . .</b>	<b>33</b>
Особенности языка в главе . . . . .	33
Применение распределительного закона . . . . .	33
Упражнения . . . . .	35
<b>Уравнения с дробными коэффициентами . . . . .</b>	<b>39</b>
Особенности языка в главе . . . . .	39
Уравнения с дробными коэффициентами . . . . .	39
Упражнения . . . . .	41
<b>Пропорции . . . . .</b>	<b>44</b>
Прямая и обратная пропорциональность . . . . .	45
Упражнения . . . . .	46
<b>Системы линейных уравнений с двумя неизвестными . . . . .</b>	<b>49</b>
Количество решений системы . . . . .	50
Решение системы уравнений с двумя неизвестными . . . . .	51
Метод сложения (исключения) . . . . .	52
Метод подстановки . . . . .	53
Какой метод выбрать: сложения или подстановки? . . . . .	55
Упражнения . . . . .	56
<b>Приложение 1. Как искать НОК чисел . . . . .</b>	<b>59</b>

## Предисловие

Данная книга является попыткой создать пособие, в котором изложены методы решения уравнений, не выходящих за рамки школьной программы. Умение решать уравнения является одним из важнейших навыков, овладев которым, ученик сможет легко решать задачи.

В части "Упражнения" представлены уравнения и задачи для закрепления предшествующего материала. Некоторые упражнения можно решить и без составления уравнений, но для отработки навыка желательно решать задачи именно через них.

Если будут найдены какие-либо опечатки или у вас появятся вопросы или предложения, автора можно найти по ссылке в телеграме: [@Zenchivan](#).

# Базовая теория

## Условные обозначения

$\Leftrightarrow$  - знак равносильности. Означает, что условие слева и условие справа являются одинаковыми.

$\Rightarrow$  - знак, означающий слово "следовательно".

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Условие 1} \\ \text{Условие 2} \end{array} \right.$  - знак системы. Требуется одновременного выполнения всех записанных условий.

## Однозначность действий

Прежде чем учиться решать уравнения, нужно понять главное правило, которое делает это возможным. В математике четыре основных действия — сложение, вычитание, умножение и деление (не на ноль) — обладают важным свойством: они однозначны. Это значит, что для одних и тех же чисел результат действия всегда будет одним и тем же.

### Примеры:

- 1) Если мы складываем 5 и 3, мы всегда получаем в ответе 8
- 2) Если мы вычитаем из 10 7, мы всегда получаем в ответе 3
- 3) Если мы умножаем 10 на 20, мы всегда получаем в ответе 200
- 4) Если мы делим 12 на 4, мы всегда получаем в ответе 3

Формально однозначность сложения записывается следующим образом:

$$a + b = a + b$$

То же самое можно записать со знаком умножения и вычитания. Со знаком деления запись выглядит иначе:

$$\left\{ \begin{array}{l} a : b = a : b \\ b \neq 0 \end{array} \right.$$

Связано это с тем, что на ноль делить нельзя, поэтому необходимо написать, что делитель не равен нулю.

## Метод весов.

Как использовать однозначность действий?

Представим, что у нас есть чашечные весы, на чашах которых лежит одинаковый груз. К примеру, слева — 5 килограммов яблок, справа — 5 килограммов груш. Что можно делать, чтобы равновесие сохранилось?

- Можно **прибавить** к обеим чашам одинаковую массу фруктов. Например, по три килограмма фруктов к каждой чаше: тогда на каждой чаше окажется по 8 килограммов фруктов.
- Можно **убрать** с обеих чаш одинаковую массу фруктов. Например, снять с каждой чаши по два килограмма: тогда на каждой чаше останется по 3 килограмма фруктов.
- Можно **увеличить** груз на обеих чашах в одно и то же число раз. Например, добавить на каждую чашу ещё по одному такому же набору фруктов (умножить груз на 2): тогда на каждой чаше будет по 10 килограмм фруктов.
- Можно **уменьшить** груз на обеих чашах в одно и то же число раз, если он делится без остатка. Например, оставить на каждой чаше только половину фруктов (разделить груз на 5): тогда на каждой чаше останется по 1 килограмму фруктов.

Формально прибавление 3 килограммов фруктов к обеим частям записывается так:

$$\begin{array}{l} 5 = 5 \quad | + 3 \\ 5 + 3 = 5 + 3 \\ 8 = 8 \end{array}$$

Вертикальная черта означает, что действие справа от черты мы применяем и к левой, и к правой части равенства. Из-за однозначности сложения знак равенства останется верным: из того, что  $5 = 5$ , следует, что  $5 + 3 = 5 + 3$ , то есть  $8 = 8$ .

Точно так же работают и другие действия. Если снять с обеих чаш по 2 килограмма:

$$\begin{array}{l} 5 = 5 \quad | - 2 \\ 5 - 2 = 5 - 2 \\ 3 = 3 \end{array}$$

Или увеличить груз на обеих чашах в 2 раза:

$$\begin{array}{l} 5 = 5 \quad | \cdot 2 \\ 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \\ 10 = 10 \end{array}$$

Или разделить груз на обеих чашах на 5 частей:

$$\begin{aligned}5 &= 5 \quad | : 5 \\5 : 5 &= 5 : 5 \\1 &= 1\end{aligned}$$

Во всех случаях равновесие сохраняется, потому что мы делаем с обеими частями равенства одно и то же однозначное действие. Этот принцип - основа для решения уравнений: мы можем преобразовывать уравнение, делая одинаковые действия с обеими его частями, пока не придём к ответу.

## Равносильные преобразования

Не все преобразования в процессе решения уравнений можно применять к обеим частям. Можно применять только те, которые являются равносильными:

**Равносильное преобразование - преобразование, для которого есть другое преобразование, которое возвращает всё назад**

К примеру, если мы прибавили к обеим чашам весов, на каждой из которых уже было по 5 килограмм фруктов, по три килограмма фруктов, то мы можем их снять с весов, то есть вычесть из обеих частей 3, и всё вернётся назад.

**Равносильные преобразования:**

- 1) прибавление к обеим частям и вычитание из обеих частей любого числа
  - 2) умножение и деление обеих частей на число, которое не равно нулю
- Примером неравносильного преобразования, которое при этом можно применить в силу однозначности действия, является умножение на ноль: для него нет обратного, так как мы не можем всё вернуть обратно, поделив обе части на ноль (на ноль делить нельзя).

## Законы сложения и умножения

Замечали ли вы, что можно складывать числа в любом порядке и результат не изменится? Или что умножение числа на сумму - это то же самое, что умножить его на каждое слагаемое? За этими очевидными фактами скрываются строгие законы арифметики. Знание этих законов превращает решение уравнений из гадания в осознанный и точный процесс. Давайте соберём их в одну систему - это поможет действовать уверенно и осознанно.

- **Переместительный закон сложения**

*«От перемены мест слагаемых сумма не меняется».*

Формально:  $a + b = b + a$ .

**Пример:**  $7 + 3 = 3 + 7 = 10$ .

Этот закон позволяет менять порядок слагаемых.

- **Переместительный закон умножения**

*«От перемены мест множителей произведение не меняется».*

Формально:  $a \cdot b = b \cdot a$ .

**Пример:**  $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 20$ .

Этот закон позволяет менять порядок множителей.

- **Сочетательный закон сложения**

*«Слагаемые можно группировать как угодно - сумма от этого не изменится».*

Формально:  $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ .

**Пример:**  $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 = 2 + 3 + 4 = 9$ .

Этот закон позволяет складывать несколько чисел в любом удобном порядке.

- **Сочетательный закон умножения**

*«Множители можно группировать как угодно - произведение от этого не изменится».*

Формально:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$ .

**Пример:**  $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .

Этот закон позволяет умножать несколько чисел в любом удобном порядке.

- **Распределительный закон умножения относительно сложения**

*«Чтобы умножить сумму на число, можно умножить каждое слагаемое на это число и результаты сложить».*

Формально:  $d \cdot (a + b) = d \cdot a + d \cdot b$ .

**Пример:**  $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$ .

Этот закон - главный инструмент для раскрытия скобок. Он же работает и для вычитания:

$d \cdot (a - b) = d \cdot a - d \cdot b$ .

**Пример:**  $4 \cdot (7 - 2) = 4 \cdot 7 - 4 \cdot 2 = 28 - 8 = 20$ .

### **Зачем это нужно при решении уравнений?**

Именно эти законы позволяют нам:

- Переставлять слагаемые и множители для удобства.
- Раскрывать скобки, чтобы упростить уравнение.

- Приводить подобные слагаемые (это обратное применение распределительного закона).
- Группировать числа так, чтобы вычисления стали проще.

Запомните: все преобразования, которые вы делаете с уравнением, должны опираться на один из этих законов или на равносильные преобразования. Так вы всегда будете знать, *почему* можно сделать тот или иной шаг.

# Что такое уравнение?

В жизни и в математике мы часто ищем неизвестное: Сколько яблок было в корзине, если после того, как съели 3, осталось 5? Сколько стоит одна ручка, если за 4 одинаковые заплатили 120 рублей? Какую сумму нужно откладывать каждый месяц, чтобы через полгода накопить на подарок за 3000 рублей? Задачи бывают и проще, и сложнее, но у них есть общее: чтобы найти ответ, нужно установить чёткую связь между известными и неизвестными числами. Таким универсальным инструментом для записи и решения подобных задач являются **уравнения**.

**Уравнение - это равенство с переменной, которое является истинным при определённых значениях переменной и ложным при других её значениях.**

Как следует из определения, в любом уравнении есть знак равенства и переменная. Схематично уравнение можно записать так:

$$\text{Левая часть} = \text{Правая часть}$$

При этом переменная может быть только в левой части, только в правой части или в обеих частях сразу, в книге переменная обычно будет слева, но в случае, если она будет справа, нет ничего страшного, так как если левая часть равна правой, то правая часть равна левой. То есть можно менять местами левую и правую части уравнения. Этим мы будем иногда пользоваться в книге.

**Примеры уравнений:**  $x = 8$

$$x - 3 = 5$$

$$x + 12 = 18$$

$$x : 19 = 19$$

Значение переменной, при котором уравнение превращается в верное равенство, называется корнем уравнения.

Корень уравнения - значение переменной, при котором уравнение превращается в верное равенство

У уравнения может не быть корней, может быть несколько корней, может быть бесконечно много корней, но обычно у них ровно один корень. Возьмём уравнение  $x - 3 = 5$ . Мы можем подставлять вместо переменной разные числа. К примеру, подставим 4, 5, 8, 12, 100:

$$4 - 3 = 1 \neq 5$$

$$5 - 3 = 2 \neq 5$$

$$8 - 3 = 5$$

$$12 - 3 = 9 \neq 5$$

$$100 - 3 = 97 \neq 5$$

Таким образом, числа 4, 5, 12, 100 не являются корнями уравнения, а число 8 является.

Возьмём уравнение  $x + 1 = x$ . Если мы будем подставлять вместо переменной числа, то всегда будем слева получать на единицу больше, чем справа, поэтому у такого уравнения не будет корней.

Возьмём уравнение  $x = x$ . Любое число, которое мы подставим, будет корнем этого уравнения.

Решение уравнения заключается в нахождении всех корней данного уравнения. Дальше в книге будет разобрано, как правильно решать уравнения.

### Алгоритм проверки корня уравнения

1. **Подстановка.** Заменя переменную в исходном уравнении найденным числом.
2. **Вычисление.** Посчитай значение левой части и правой части отдельно.
3. **Сравнение.** Сравни полученные результаты: если они равны, то число является корнем уравнения

## Задачи

Проверьте, является ли каждое из предложенных чисел корнем уравнения. Обоснуйте ответ: подставьте число вместо переменной и проверьте, верно ли равенство.

1. Уравнение:  $x + 9 = 17$ . Проверьте числа: 8, 9, 10.
2. Уравнение:  $5 \cdot y = 40$ . Проверьте числа: 7, 8, 9.
3. Уравнение:  $2 \cdot z - 5 = 13$ . Проверьте числа: 7, 9, 11.
4. Уравнение:  $24 : t = 6$ . Проверьте числа: 3, 4, 6.
5. Уравнение:  $3 \cdot (a + 4) = 27$ . Проверьте числа: 3, 5, 7.

# Простейшие уравнения

Умение решать уравнения - основа алгебры. Всё сложное состоит из простого, и в этой главе мы изучим восемь простейших типов уравнений, которые постоянно встречаются. Освоив их, вы сможете решать большинство школьных задач. Перечислим их:

$$x + a = b$$

$$a + x = b$$

$$x - a = b$$

$$a - x = b$$

$$x \cdot a = b$$

$$a \cdot x = b$$

$$x : a = b$$

$$a : x = b$$

Найдём корень каждого из уравнений.

## Нахождение неизвестного слагаемого: $x + a = b$

У Миши в коробке было несколько карандашей. Когда он положил туда ещё 4 карандаша, их стало 11. Сколько карандашей было в коробке сначала?

**Составим уравнение:**

- Пусть  $x$  — начальное число карандашей (это то, что мы ищем).
- К этому количеству **прибавили** 4 карандаша:  $x + 4$ .
- После этого карандашей стало 11:  $x + 4 = 11$ .

**Как найти ответ?** Можно попробовать подобрать число:  $7 + 4 = 11$ . Значит,  $x = 7$ . Получилось!

**Вопрос:** Как из чисел 11 и 4 получить 7, не угадывая?

**Ответ:** Нужно из итогового количества (11) **вычесть** добавленные карандаши (4):

$$7 = 11 - 4.$$

**Вывод (правило):** Чтобы найти неизвестное слагаемое, необходимо **из суммы вычесть известное слагаемое**.

**Теперь докажем это правило строго, используя однозначность действий:**

Решим уравнение  $x + a = b$ , где  $a$  и  $b$  - какие-то числа.

Будем иметь в виду, что в конце решения уравнения нам необходимо получить строчку, где с одной стороны будет переменная, а с другой — число,

при котором равенство является верным. В нашем случае слева находится не только переменная, но и число  $a$ . Нам необходимо избавиться от него, чтобы найти решение:

$$x + a = b \quad | \quad -a$$

Мы вычитаем из обеих частей число  $a$ , пользуясь однозначностью вычитания:

$$x + a - a = b - a$$

Пользуясь сочетательным законом сложения, запишем левую часть следующим образом:

$$x + (a - a) = b - a$$

Выражение в скобках равно нулю, поэтому не будем его писать:

$$x = b - a \quad - \text{ корень уравнения}$$

Таким образом, **корнем уравнения  $x + a = b$  является число  $b - a$** . Другими словами, **чтобы найти неизвестное слагаемое, необходимо из суммы вычесть известное слагаемое:**

$$x + a = b \iff x = b - a$$

## Пример

$$x + 8 = 15$$

$$x = 15 - 8$$

$$x = 7 \quad - \text{ корень уравнения}$$

## Упражнения

**1.1**  $x + 3 = 7$

**1.2**  $x + 12 = 20$

**1.3**  $x + 5 = 15$

**1.4**  $x + 8 = 19$

**1.5**  $x + 1 = 9$

**1.6**  $x + 25 = 40$

1.7  $x + 7 = 18$

1.8  $x + 11 = 32$

1.9  $x + 6 = 14$

1.10  $x + 9 = 25$

1.11  $x + 15 = 36$

1.12  $x + 4 = 22$

1.13  $x + 10 = 17$

1.14  $x + 18 = 30$

1.15  $x + 2 = 11$

### Нахождение неизвестного слагаемого: $a + x = b$

Согласно переместительному закону сложения  $a + x = x + a$ . Корнем уравнения  $x + a = b$  является число  $b - a$ . Таким образом, **корнем уравнения  $a + x = b$  тоже является число  $b - a$ .** Другими словами, **чтобы найти неизвестное слагаемое, необходимо из суммы вычесть известное слагаемое:**

$$a + x = b \iff x = b - a$$

### Пример

$$9 + x = 18$$

$$x = 18 - 9$$

$x = 9$  - корень уравнения

### Упражнения

1.16  $4 + x = 10$

1.17  $7 + x = 16$

1.18  $9 + x = 21$

1.19  $2 + x = 13$

1.20  $15 + x = 28$

1.21  $6 + x = 18$

1.22  $11 + x = 24$

1.23  $3 + x = 15$

1.24  $8 + x = 20$

1.25  $14 + x = 31$

1.26  $5 + x = 12$

1.27  $10 + x = 27$

1.28  $17 + x = 35$

1.29  $1 + x = 8$

1.30  $13 + x = 29$

### Нахождение неизвестного уменьшаемого: $x - a = b$

После того как Маша **потратила 50 рублей** из своих денег, у неё **осталось 120 рублей**. Сколько денег было у Маши изначально?

Составим уравнение:

- Пусть  $x$  — начальная сумма денег (это то, что мы ищем).
- Маша **потратила 50 рублей**. Значит, её бюджет **уменьшился** на эту сумму:  $x - 50$ .
- После этого у неё осталось 120 рублей:  $x - 50 = 120$ .

**Как найти ответ?** Можно попробовать подобрать число:  $170 - 50 = 120$ . Значит,  $x = 170$ . Получилось!

**Вопрос:** Как из чисел 120 и 50 получить 170, не угадывая?

**Ответ:** Нужно к остатку (120 рублей) **прибавить** потраченную сумму (50 рублей):

$$170 = 120 + 50.$$

**Вывод (правило):** Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, необходимо **сложить разность и вычитаемое**.

**Теперь докажем это правило строго, используя однозначность действий:**

$$x - a = b$$

Слева находится число  $a$ , от которого мы избавимся, прибавив это же число к обеим частям:

$$\begin{aligned}x - a = b & \quad | + a \\x - a + a = b + a\end{aligned}$$

Так как  $x - a + a = x$ , перепишем уравнение следующим образом:

$$x = b + a - \text{корень уравнения}$$

Таким образом, **корнем уравнения  $x - a = b$  является число  $b + a$** . Другими словами, **чтобы найти неизвестное уменьшаемое, необходимо прибавить к разности вычитаемое:**

$$x - a = b \iff x = b + a$$

### Пример

$$\begin{aligned}x - 10 &= 25 \\x &= 10 + 25 \\x &= 35 \quad - \text{корень уравнения}\end{aligned}$$

### Упражнения

- 1.31  $x - 5 = 4$
- 1.32  $x - 8 = 10$
- 1.33  $x - 3 = 7$
- 1.34  $x - 12 = 15$
- 1.35  $x - 6 = 9$
- 1.36  $x - 1 = 14$
- 1.37  $x - 9 = 11$
- 1.38  $x - 4 = 18$
- 1.39  $x - 7 = 20$
- 1.40  $x - 2 = 5$
- 1.41  $x - 15 = 22$
- 1.42  $x - 10 = 13$
- 1.43  $x - 11 = 25$
- 1.44  $x - 14 = 16$
- 1.45  $x - 20 = 30$

## Нахождение неизвестного вычитаемого: $a - x = b$

В пакете было **20 конфет**. После того как несколько конфет съели, в пакете **осталось 13 конфет**. Сколько конфет съели?

**Составим уравнение:**

- Пусть  $x$  - количество съеденных конфет (это то, что мы ищем).
- Было 20 конфет, съели  $x$  конфет. Значит, от начального количества **отняли** съеденное:  $20 - x$ .
- После этого осталось 13 конфет:  $20 - x = 13$ .

**Как найти ответ?** Можно попробовать подобрать число:  $20 - 7 = 13$ . Значит,  $x = 7$ . Получилось!

**Вопрос:** Как из чисел 20 и 13 получить 7, не угадывая?

**Ответ:** Нужно из начального количества (20) **вычесть** оставшееся количество (13):

$$7 = 20 - 13.$$

**Вывод (правило):** Чтобы найти неизвестное вычитаемое, необходимо из уменьшаемого **вычесть разность**.

**Теперь докажем это правило строго, используя однозначность действий:**

$$a - x = b \quad | + x$$

Прибавим к обеим частям  $x$ :

$$a - x + x = b + x$$

Так как  $a - x + x = a$ , запишем уравнение следующим образом:

$$a = b + x$$

Поменяем для удобства части уравнения местами:

$$b + x = a$$

Уравнение такого вида мы уже решали, поэтому сразу напишем ответ:

$$x = a - b - \text{корень уравнения}$$

Таким образом, **корнем уравнения  $a - x = b$  является число  $a - b$** . Другими словами, **чтобы найти неизвестное вычитаемое, необходимо из уменьшаемого вычесть разность:**

$$a - x = b \iff x = a - b$$

## Пример

$$18 - x = 7$$

$$x = 18 - 7$$

$$x = 11 \quad \text{- корень уравнения}$$

## Упражнения

1.46  $10 - x = 3$

1.47  $15 - x = 7$

1.48  $18 - x = 9$

1.49  $25 - x = 12$

1.50  $14 - x = 6$

1.51  $20 - x = 5$

1.52  $22 - x = 14$

1.53  $30 - x = 18$

1.54  $17 - x = 8$

1.55  $29 - x = 15$

1.56  $12 - x = 4$

1.57  $16 - x = 9$

1.58  $21 - x = 11$

1.59  $35 - x = 20$

1.60  $40 - x = 25$

## Нахождение неизвестного множителя: $x \cdot a = b$

Несколько одинаковых тетрадей стоят **180 рублей**. Одна тетрадь стоит **45 рублей**. Сколько купили тетрадей?

Составим уравнение:

- Пусть  $x$  - количество тетрадей (это то, что мы ищем).

- Общая стоимость - это цена одной тетради, **умноженная** на количество:  $45 \cdot x$ .
- По условию общая стоимость равна 180 рублям:  $45 \cdot x = 180$ .

**Как найти ответ?** Можно попробовать подобрать число:  $45 \cdot 4 = 180$ . Значит,  $x = 4$ . Получилось!

**Вопрос:** Как из чисел 180 и 45 получить 4, не угадывая?

**Ответ:** Нужно общую стоимость (180) **разделить** на цену одной тетради (45):

$$4 = 180 : 45.$$

**Вывод (правило):** Чтобы найти неизвестный множитель, необходимо произведение **разделить на известный множитель**.

**Теперь докажем это правило строго, используя однозначность действий:**

$$\begin{aligned} x \cdot a = b & \quad | : a \\ x \cdot a : a = b : a \end{aligned}$$

Так как  $x \cdot a : a = x$ , можно переписать уравнение следующим образом:

$$x = b : a - \text{корень уравнения}$$

Таким образом, **корнем уравнения  $x \cdot a = b$  является число  $b : a$** . Другими словами, **чтобы найти неизвестный множитель, необходимо разделить произведение на известный множитель:**

$$x \cdot a = b \iff x = b : a$$

## Пример

$$x \cdot 8 = 48$$

$$x = 48 : 8$$

$$x = 6 - \text{корень уравнения}$$

## Упражнения

1.61  $x \cdot 2 = 8$

1.62  $x \cdot 5 = 25$

1.63  $x \cdot 3 = 18$

1.64  $x \cdot 4 = 28$

1.65  $x \cdot 6 = 42$

$$1.66 \quad x \cdot 7 = 35$$

$$1.67 \quad x \cdot 8 = 48$$

$$1.68 \quad x \cdot 9 = 54$$

$$1.69 \quad x \cdot 10 = 70$$

$$1.70 \quad x \cdot 11 = 66$$

$$1.71 \quad x \cdot 12 = 60$$

$$1.72 \quad x \cdot 4 = 36$$

$$1.73 \quad x \cdot 5 = 40$$

$$1.74 \quad x \cdot 2 = 14$$

$$1.75 \quad x \cdot 3 = 21$$

**Нахождение неизвестного множителя:**  $a \cdot x = b$

Согласно переместительному закону умножения  $a \cdot x = x \cdot a$ , поэтому уравнение  $a \cdot x = b$  можно переписать в виде  $x \cdot a = b$ . Корнем уравнения  $x \cdot a = b$  является число  $b : a$ , поэтому **корнем  $a \cdot x = b$  уравнения тоже является число  $b : a$ . чтобы найти неизвестный множитель, необходимо разделить произведение на известный множитель:**

$$a \cdot x = b \iff x = b : a$$

**Пример**

$$7 \cdot x = 49$$

$$x = 49 : 7$$

$x = 7$  - корень уравнения

**Упражнения**

$$1.76 \quad 3 \cdot x = 12$$

$$1.77 \quad 6 \cdot x = 36$$

$$1.78 \quad 4 \cdot x = 20$$

$$1.79 \quad 7 \cdot x = 42$$

$$1.80 \quad 5 \cdot x = 30$$

$$1.81 \quad 8 \cdot x = 56$$

$$1.82 \quad 9 \cdot x = 72$$

$$1.83 \quad 2 \cdot x = 18$$

$$1.84 \quad 10 \cdot x = 90$$

$$1.85 \quad 11 \cdot x = 99$$

$$1.86 \quad 12 \cdot x = 84$$

$$1.87 \quad 4 \cdot x = 32$$

$$1.88 \quad 5 \cdot x = 45$$

$$1.89 \quad 6 \cdot x = 54$$

$$1.90 \quad 7 \cdot x = 63$$

### Нахождение неизвестного делимого: $x : a = b$

Все конфеты раздали **5** детям поровну. Каждый ребёнок получил по **4** конфеты. Сколько всего было конфет?

Составим уравнение:

- Пусть  $x$  — общее число конфет (это то, что мы ищем).
- Если все конфеты ( $x$ ) **разделить** на 5 детей поровну, то каждый получит  $x : 5$  конфет.
- По условию каждый получил 4 конфеты:  $x : 5 = 4$ .

**Как найти ответ?** Можно попробовать подобрать число:  $20 : 5 = 4$ . Значит,  $x = 20$ . Получилось!

**Вопрос:** Как из чисел 4 и 5 получить 20, не угадывая?

**Ответ:** Нужно количество, доставшееся одному (4), **умножить** на число детей (5):

$$20 = 4 \cdot 5.$$

**Вывод (правило):** Чтобы найти неизвестное делимое, необходимо **частное умножить на делитель**.

Теперь докажем это правило строго, используя однозначность действий:

$$\begin{aligned} x : a = b & \quad | \cdot a \\ x : a \cdot a = b \cdot a \end{aligned}$$

Так как  $x : a \cdot a = x$ , уравнение можно переписать в следующем виде:

$$x = b \cdot a - \text{корень уравнения}$$

Таким образом, **корнем уравнения  $x : a = b$  является число  $b \cdot a$** . Другими словами, **чтобы найти неизвестное делимое, необходимо умножить частное на известный делитель:**

$$x : a = b \iff x = b \cdot a$$

### Пример

$$x : 5 = 12$$

$$x = 12 \cdot 5$$

$$x = 60 - \text{корень уравнения}$$

### Упражнения

**1.91**  $x : 2 = 6$

**1.92**  $x : 3 = 5$

**1.93**  $x : 4 = 7$

**1.94**  $x : 5 = 4$

**1.95**  $x : 6 = 8$

**1.96**  $x : 7 = 3$

**1.97**  $x : 8 = 9$

**1.98**  $x : 9 = 6$

**1.99**  $x : 10 = 10$

**1.100**  $x : 11 = 2$

**1.101**  $x : 12 = 5$

**1.102**  $x : 2 = 11$

**1.103**  $x : 3 = 8$

**1.104**  $x : 4 = 10$

**1.105**  $x : 5 = 9$

## Нахождение неизвестного делителя: $a : x = b$

**24 метра** проволоки разрезали на несколько равных кусков по **3 метра** каждый. На сколько кусков разрезали проволоку?

Составим уравнение:

- Пусть  $x$  — число кусков (это то, что мы ищем).
- Если всю проволоку (24 м) **разделить** на  $x$  кусков, то каждый кусок будет длиной  $24 : x$  метров.
- По условию каждый кусок длиной 3 метра:  $24 : x = 3$ .

**Как найти ответ?** Можно попробовать подобрать число:  $24 : 8 = 3$ . Значит,  $x = 8$ . Получилось!

**Вопрос:** Как из чисел 24 и 3 получить 8, не угадывая?

**Ответ:** Нужно общую длину (24) **разделить** на длину одного куска (3):

$$8 = 24 : 3.$$

**Вывод (правило):** Чтобы найти неизвестный делитель, необходимо **делимое разделить на частное**.

**Теперь докажем это правило строго, используя однозначность действий:**

$$a : x = b \quad | \cdot x$$

Умножим обе части на  $x$ :

$$a : x \cdot x = b \cdot x$$

Так как  $a : x \cdot x = a$ , запишем уравнение следующим образом:

$$a = b \cdot x$$

Поменяем для удобства части уравнения местами:

$$b \cdot x = a$$

Уравнения такого вида мы уже решали, поэтому сразу напишем ответ:

$$x = a : b - \text{корень уравнения}$$

Таким образом, **корнем уравнения  $a : x = b$  является число  $a : b$** . Другими словами, **чтобы найти неизвестный делитель, необходимо разделить делимое на частное:**

$$a : x = b \iff x = b : a$$

## Пример

$$125 : x = 5$$

$$x = 125 : 5$$

$$x = 25 \quad \text{— корень уравнения}$$

## Упражнения

**1.106**  $12 : x = 3$

**1.107**  $18 : x = 2$

**1.108**  $20 : x = 4$

**1.109**  $24 : x = 6$

**1.110**  $28 : x = 7$

**1.111**  $30 : x = 5$

**1.112**  $36 : x = 9$

**1.113**  $40 : x = 8$

**1.114**  $42 : x = 6$

**1.115**  $45 : x = 5$

**1.116**  $48 : x = 12$

**1.117**  $54 : x = 6$

**1.118**  $56 : x = 7$

**1.119**  $60 : x = 10$

**1.120**  $63 : x = 9$

## Краткое содержание

В этой главе было написано, как решать уравнения в одно действие со сложением, вычитанием, умножением, делением. Перечислим решение каждого уравнения:

№	Тип уравнения	Что неизвестно?	Правило (как найти $x$ )
1	$x + a = b$	Слагаемое	$x = b - a$
2	$a + x = b$	Слагаемое	$x = b - a$
3	$x - a = b$	Уменьшаемое	$x = b + a$
4	$a - x = b$	Вычитаемое	$x = a - b$
5	$x \cdot a = b$	Множитель	$x = b : a$
6	$a \cdot x = b$	Множитель	$x = b : a$
7	$x : a = b$	Делимое	$x = b \cdot a$
8	$a : x = b$	Делитель	$x = a : b \quad (x \neq 0)$

## Задачи

- 1.121** В саду уже росло 15 яблонь. После того, как посадили еще несколько, в саду стало 28 яблонь. Сколько яблонь посадили?
- 1.122** У Пети было несколько марок. После того, как ему подарили еще 9 марок, у него стало 43 марки. Сколько марок было у Пети изначально?
- 1.123** На стоянке стояло 32 автомобиля. Через некоторое время приехало еще несколько машин, и на стоянке стало 51 автомобиль. Сколько автомобилей приехало на стоянку?
- 1.124** У бабушки было 25 пирожков. Внук съел несколько пирожков, и у бабушки осталось 18 пирожков. Сколько пирожков съел внук?
- 1.125** На клумбе росло 34 розы. Сорвали несколько роз, и на клумбе осталось 19 роз. Сколько роз сорвали?
- 1.126** В копилке у Ани было 67 рублей. После того, как она положила в копилку еще несколько рублей, у нее стало 95 рублей. Сколько рублей Аня положила в копилку?
- 1.127** В коробке было 50 конфет. Дети съели несколько конфет, и в коробке осталось 32 конфеты. Сколько конфет съели дети?

- 1.128** В автобусе ехали 19 пассажиров. На остановке зашли еще несколько человек, и в автобусе стало 36 пассажиров. Сколько человек зашло в автобус на остановке?
- 1.129** В вазе лежало 42 апельсина. Семья съела несколько апельсинов, и в вазе осталось 27 апельсинов. Сколько апельсинов съела семья?
- 1.130** В книге было 120 страниц. Оля прочитала несколько страниц, и ей осталось прочитать 75 страниц. Сколько страниц прочитала Оля?
- 1.131** Полина купила 6 одинаковых тетрадей. За все тетради она заплатила 72 рубля. Сколько стоит одна тетрадь?
- 1.132** В классе 25 учеников. Каждый ученик принес по одинаковому количеству открыток для благотворительной ярмарки. Всего было собрано 200 открыток. Сколько открыток принес каждый ученик?
- 1.133** У Кати было несколько конфет. После того, как она отдала 7 конфет своему брату, у нее осталось 15 конфет. Сколько конфет было у Кати сначала?
- 1.134** После того, как из аквариума выловили 12 рыбок, в нём осталось 23 рыбки. Сколько рыбок было в аквариуме изначально?
- 1.135** В школьном саду посадили несколько рядов яблонь, по 8 яблонь в каждом ряду. Всего было посажено 96 яблонь. Сколько рядов яблонь посадили?
- 1.136** Несколько друзей скинулись по 150 рублей каждый, чтобы купить товарищу подарок на день рождения. Всего было собрано 1800 рублей. Сколько было друзей?
- 1.137** 48 пирожных разложили по коробкам, в каждую коробку положили одинаковое количество пирожных. Получилось 8 коробок. Сколько пирожных в каждой коробке?
- 1.138** В кондитерской 7 одинаковых тортов разрезали на куски. Получилось 84 куска. На сколько кусков был разрезан каждый торт?
- 1.139** 63 метра ткани разрезали на одинаковые куски, каждый кусок длиной 7 метров. Сколько кусков ткани получилось?
- 1.140** После того как туристы прошли 18 километров, им осталось пройти еще 35 километров. Какое расстояние должны были пройти туристы всего?
- 1.141** На парковке осталось 27 мест после того, как уехало 15 машин. Сколько мест было на парковке изначально?

- 1.142 После того как из коробки забрали 9 карандашей, в ней осталось 32 карандаша. Сколько карандашей было в коробке сначала?
- 1.143 72 конфеты разделили поровну между детьми. Каждый ребенок получил 9 конфет. Сколько было детей?
- 1.144 У Оли было несколько марок. Она разложила их по 8 штук на каждый лист альбома. Получилось 5 листов. Сколько марок было у Оли?
- 1.145 Несколько конфет разделили поровну между 6 друзьями. Каждый друг получил по 7 конфет. Сколько всего было конфет?
- 1.146 На празднике было несколько воздушных шариков. Их раздали 9 детям, каждому дали по 4 шарика. Сколько всего было шариков?
- 1.147 Мама купила 45 мандаринов и разделила их поровну между детьми. Каждый ребенок получил 9 мандаринов. Сколько детей у мамы?
- 1.148 Туристы прошли несколько километров за 4 часа, двигаясь с постоянной скоростью. Каждый час они проходили по 5 километров. Сколько всего километров прошли туристы?
- 1.149 В библиотеке несколько книг разложили по стопкам, в каждую стопку положили по 10 книг. Получилось 7 стопок. Сколько всего книг разложили?
- 1.150 Какое число надо написать вместо знака  $\square$ , чтобы корень уравнения  $x + 15 = \square$  был равен 7?
- 1.151 Какое число надо написать вместо знака  $\triangle$ , чтобы корень уравнения  $\triangle + x = 42$  был равен 18?
- 1.152 В уравнении  $29 + x = 71$  изменили одно число так, что корень стал равен 50. Какое число изменили и как?
- 1.153 Корень уравнения  $x + a = 50$  равен 30. Чему равно число  $a$ ?
- 1.154 Какое число надо вписать в окошко  $\square$ , чтобы корень уравнения  $x - \square = 12$  был равен 20?
- 1.155 Какое число надо вписать в окошко  $\triangle$ , чтобы корень уравнения  $\triangle - x = 6$  был равен 4?
- 1.156 В уравнении  $45 - x = 20$  число 45 заменили на  $\square$ , и корень стал равен 30. Чему равен  $\square$ ?

- 1.157** Какое число надо вписать в окошко  $\square$ , чтобы корень уравнения  $100 - x = \square$  был равен 25?
- 1.158** Какое число надо вписать в окошко  $\square$ , чтобы корень уравнения  $x \cdot 5 = \square$  был равен 8?
- 1.159** Какое число надо вписать в окошко  $\triangle$ , чтобы корень уравнения  $\triangle \cdot x = 64$  был равен 4?
- 1.160** В уравнении  $6 \cdot x = 54$  число 54 заменили на  $\square$ , и корень стал равен 10. Чему равен  $\square$ ?
- 1.161** Какое число надо вписать в окошко  $\square$ , чтобы число 15 было корнем уравнения  $\square \cdot x = 0$ ?
- 1.162** Какое число надо вписать в окошко  $\square$ , чтобы корень уравнения  $x : 3 = \square$  был равен 15?
- 1.163** Какое число надо вписать в окошко  $\triangle$ , чтобы корень уравнения  $\triangle : x = 9$  был равен 2?
- 1.164** В уравнении  $48 : x = 6$  число 6 заменили на  $\square$ , и корень стал равен 6. Чему равен  $\square$ ?
- 1.165** Какое число надо вписать в окошко  $\square$ , чтобы корень уравнения  $x : \square = 7$  был равен 98?

## Уравнения в несколько действий

В жизни и в задачах условия редко описываются одним действием. Чаще цепочкой: «сначала сделай это, потом то». Так и в уравнениях: операции могут быть «упакованы» друг в друга, как матрёшки. Решать такие уравнения мы будем, последовательно распаковывая эти матрёшки, начиная с самой внешней. Главный принцип остаётся тем же: делать одинаковые преобразования с обеими частями равенства. Разберём на примере:

$$25 : (5 \cdot (16 - (x + 4))) = 5$$

Первое, что необходимо сделать, - расставить порядок действий:

$$25 \overset{4}{:} (5 \overset{3}{\cdot} (16 \overset{2}{-} (x \overset{1}{+} 4))) = 5$$

Представим, что  $x$  - подарок, завёрнутый в несколько упаковок. Когда мы будем распаковывать его, мы будем идти от последней обёртки к первой. Так и в решении уравнения будем идти от последнего действия к первому. Посмотрим на последнее - это деление. Для наглядности составим табличку, в которой покажем, что является делимым, делителем и частным:

делимое	делитель	частное
25	$5 \cdot (16 - (x + 4))$	5

Делимое и частное - обычные числа. Делитель - выражение с переменной, следовательно, мы не знаем, чему равно это выражение, так как переменная может принять любое число. Поэтому всё это выражение является неизвестным делителем. Найдём его значение, используя правило нахождения неизвестного делителя из прошлой главы:

$$\begin{aligned} 25 : (5 \cdot (16 - (x + 4))) &= 5 \\ 5 \cdot (16 - (x + 4)) &= 25 : 5 \\ 5 \cdot (16 - (x + 4)) &= 5 \end{aligned}$$

Смотрим снова на последнее действие. Это умножение. Сделаем опять табличку, в которой покажем, что является первым множителем, что - вторым, что - произведением:

множитель	множитель	произведение
5	$16 - (x + 4)$	5

Первый множитель и произведение являются обычными числами. Второй множитель - выражение с переменной, то есть неизвестный множитель. Найдём его значение, используя правило из прошлой главы:

$$\begin{aligned}5 \cdot (16 - (x + 4)) &= 5 \\16 - (x + 4) &= 5 : 5 \\16 - (x + 4) &= 1\end{aligned}$$

Снова смотрим на последнее действие. Это вычитание. Делаем табличку:

уменьшаемое	вычитаемое	разность
16	$x + 4$	1

Вычитаемое - выражение с переменной. Найдём его значение:

$$\begin{aligned}16 - (x + 4) &= 1 \\x + 4 &= 16 - 1 \\x + 4 &= 15\end{aligned}$$

Осталось уравнение в одно действие. Такие уравнения мы решали в прошлой главе:

$$\begin{aligned}x &= 15 - 4 \\x &= 11 \quad \text{- корень уравнения}\end{aligned}$$

Таким образом, если мы расставим порядок действий и будем идти от последнего к первому, оставляя в левой части выражение с переменной, мы рано или поздно избавимся от всех действий и придём к ответу.

**Примечание:** все арифметические операции, в которых нет переменной, можно выполнить сразу, чтобы упростить уравнение.

### Алгоритм решения уравнений в несколько действий:

1. **Упрости.** Вычисли значение всех числовых выражений (без переменной) в любой части уравнения.
2. **Определи порядок действий** в выражении с переменной. Отметь самое последнее (внешнее) действие.
3. **Идентифицируй тип.** Определи, каким простейшим уравнением (на сложение, вычитание, умножение, деление) является это последнее действие для целого блока с переменной.
4. **«Сними» слой.** примени соответствующее правило из таблицы простейших уравнений, чтобы избавиться от внешнего действия. Получи новое, более простое уравнение.
5. **Повторяй** шаги 2–4, пока переменная не окажется одна в одной части равенства.
6. **Сделай проверку.** Подставь найденный корень в **исходное** уравнение и убедись, что получается верное равенство.

### Упражнения

2.1  $25 - (12 : (x + 1)) = 23$

2.2  $(2 \cdot (x + 3)) - 8 = 12$

2.3  $18 - (4 \cdot (6 : (24 - (4x - 3)))) = 10$

2.4  $10 + (((x - 5) \cdot 4) + 2) \cdot 3 = 52$

2.5  $21 + (160 - 2 \cdot (x - 8)) : 3 = 61$

2.6  $12 + (100 - 5 \cdot x) : 6 = 17$

2.7  $200 + 16 \cdot (12 - 10 \cdot x : 7) = 392$

2.8  $12 - (3 \cdot (4 : (15 - (26 - 6x)))) = 0$

2.9  $45 + (((x - 25) \cdot 3) \cdot 2) = 461754 : 18$

2.10  $250 - 60 : (65 - (25x + 13)) = 220$

2.11  $100 - 4 \cdot (48 : (2 \cdot x + 4)) = 84$

2.12  $2 \cdot ((15 + 5 \cdot x) : 5 + 7) = 30$

2.13  $15 \cdot (72 : (18 - x) - 3) = 90$

**2.14**  $208 + ((6 \cdot x - 24) : 3 + 2) = 256$

**2.15**  $(19 + (44 : (2 \cdot x - 5))) \cdot 5 - 10 = 105$

**2.16**  $120 : (5 \cdot (3x - 7) - 15) = 3$

**2.17**  $6 \cdot (33 - 2 \cdot (18 : (x + 3))) - 54 = 120$

**2.18**  $(15 + 5) \cdot x - 40 = 120$

**2.19**  $100 : (24 - 4 \cdot 5) + x = 30$

**2.20**  $72 - 3 \cdot (2x + 16 : 4) = 36$

**2.21**  $(50 - 2 \cdot 10) \cdot (x + 3) = 90$

**2.22**  $48 : (20 - 2 \cdot 6) \cdot x = 24$

**2.23**  $33 + (5 \cdot 7 - 15) : x = 38$

**2.24**  $4 \cdot (x - 18 : 3) = 28$

**2.25**  $120 - (15 \cdot 4) : (x + 1) = 100$

**2.26**  $(9 \cdot 9 - 1) : 8 + x = 15$

**2.27**  $7 \cdot x + (100 - 4 \cdot 25) = 49$

**2.28** Если к задуманному числу прибавить 18, затем результат разделить на 3, то получится 12. Какое число задумано?

**2.29** Если задуманное число умножить на 2, затем прибавить 10, а результат разделить на 3, то получится 8. Какое число задумано?

**2.30** Если задуманное число разделить на 4, затем прибавить 6, то получится 11. Какое число задумано?

**2.31** Если из задуманного числа вычесть 5, затем результат умножить на 4, то получится 28. Какое число задумано?

**2.32** Если к задуманному числу прибавить 9, полученную сумму умножить на 2, а затем вычесть 4, то получится 32. Какое число задумано?

**2.33** У Максима была некоторая сумма денег. Он потратил 50 рублей на обед. Половину оставшихся денег он отдал сестре. После этого папа дал ему 40 рублей, и у Максима стало 100 рублей. Сколько денег было у Максима изначально?

- 2.34** У Киры была некоторая сумма денег. На день рождения ей подарили столько же денег, сколько у неё было. Из всех денег она потратила 30 рублей на подарок подруге. Оставшиеся деньги она распределила поровну между шестью пустыми копилками. Когда бабушка добавила 3 рубля в одну из копилек, в ней стало 8 рублей. Сколько денег было у Киры изначально?
- 2.35** Мама купила 2 одинаковые коробки конфет. 10 конфет она отложила для гостей. Остальные конфеты она разложила поровну в 4 пустые вазы. Когда дети съели 3 конфеты из одной вазы, в ней осталось 9 конфет. Сколько конфет было в одной коробке?
- 2.36** Аня сделала 5 одинаковых наборов открыток. 5 открыток она испортила и выбросила. Оставшиеся открытки она разложила в 3 пустых конверта поровну. Когда она убрала из одного конверта 2 открытки, в нём осталось 8 открыток. Сколько открыток было в одном наборе?
- 2.37** Коля купил 6 одинаковых упаковок шоколадок и полностью раздал сладости друзьям. Сначала он отдал 18 шоколадок лучшему другу. Оставшиеся шоколадки он разделил поровну между тремя одноклассниками. Одному из этих одноклассников лучший друг отдал 4 шоколадки, так как не хотел больше есть, после чего у одноклассника оказалось 12 шоколадок. Сколько шоколадок в одной упаковке?
- 2.38** У Пети было 4 одинаковые коробки карандашей. 8 карандашей он отдал другу. Половину оставшихся карандашей он положил в пенал, где уже было 5 карандашей, и в пенале стало 17 карандашей. Сколько карандашей было в одной коробке?

# Применение распределительного закона

## Особенности языка в главе

В этой главе пойдёт речь о распределительном законе умножения относительно сложения. Во-первых, когда мы говорим о слагаемых, перед слагаемым может стоять не только плюс, но и минус. Во-вторых, обычно знак умножения опускается (не ставится, но считается, что он там есть) в следующих случаях:

1) между числом слева и буквой справа:  $7 \cdot x = 7x$

2) между двумя буквами:  $x \cdot y = xy$

3) между скобкой и буквой:  $d \cdot (a + b) = d(a + b)$  или  $(a + b) \cdot d = (a + b)d$

4) между числом слева и скобкой справа:  $7 \cdot (x + y) = 7(x + y)$

В-третьих, желательно знать, что такое целые числа и как с ними работать.

## Применение распределительного закона

Вы научились "распаковывать" уравнения, где действия с переменной были чётко вложены друг в друга. Но что делать, когда переменная встречается несколько раз в разных местах уравнения? Например:  $5x - 3 = 2x + 9$ ? Такие уравнения нельзя решить простой "распаковкой". Нужно сначала собрать все  $x$  в одной части. Главный инструмент для этого - распределительный закон и умение работать с подобными слагаемыми.

**Подобные слагаемые - слагаемые, у которых одинаковая буквенная часть.**

В этом случае необходимо применять распределительный закон:

$$d(a + b) = da + db$$

Этот закон работает как слева направо, так и справа налево. Чтобы раскрыть скобки, нужно применить его слева направо. Чтобы привести подобные (то есть из нескольких подобных слагаемых сделать одно), необходимо применить его справа налево. Для приведения подобных слагаемых существует правило:

**Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить коэффициенты (числа, на которые умножается переменная) при этих слагаемых**

Решим следующее уравнение:

$$6x - 2x = 60$$

Здесь мы применим распределительный закон для  $6x$  и  $2x$ . У этих двух слагаемых одинаковая буквенная часть ( $x$ ), поэтому вынесем  $x$  за скобку, а в скобках напишем всё остальное:

$$\begin{aligned}(6 - 2)x &= 60 \\ 4x &= 60 \\ x &= 15\end{aligned}$$

Вернёмся к примеру из начала главы:  $5x - 3 = 2x + 9$ . Здесь переменная есть сразу в обеих частях, поэтому надо сначала сделать так, чтобы все подобные слагаемые с переменной оказались либо слева, либо справа. Допустим, я хочу, чтобы все слагаемые были слева. Это то же самое, если я хочу, чтобы справа их не было, поэтому мне надо избавиться от  $2x$  слева:

$$\begin{aligned}5x - 3 &= 2x + 9 & | - 2x \\ 5x - 3 - 2x &= 2x + 9 - 2x \\ 3x - 3 &= 9 & | + 3 \\ 3x - 3 + 3 &= 9 + 3 \\ 3x &= 12 & | : 3 \\ 3x : 3 &= 12 : 3 \\ x &= 4\end{aligned}$$

Рассмотрим внимательно решение. Когда я из обеих частей вычитал  $2x$  или прибавлял  $3$ , я это мотивировал тем, что избавлялся от слагаемых там, где они не должны были стоять. Но это можно рассматривать иначе: **я переносил слагаемые через знак равно, меняя знак перед ними на противоположный.** Это правило чаще применяется в решении уравнений и является более быстрым применением метода весов.

Применение распределительного закона особенно полезно при решении определённого рода задач:

В двух коробках, большой и маленькой, – 54 кубика. Сколько кубиков в каждой коробке, если в большой их в 2 раза больше?

Введём за  $x$  количество кубиков в маленькой коробке. Тогда в большой коробке находится  $2x$  кубиков. Запишем условие, что в сумме в этих коробках 54 кубика:

$$\begin{aligned}x + 2x &= 54 \\ x \cdot (1 + 2) &= 54 \\ 3x &= 54\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 18 - \text{столько кубиков в маленькой коробке} \\ 2x &= 36 - \text{столько кубиков в большой коробке}\end{aligned}$$

Ответ: 18 кубиков в маленькой коробке, 36 - в большой.

**Примечание:** если перед переменной нет числа, то мы считаем, что там

стоит единица.

Что делаем?	Как используем закон?
Раскрываем скобки	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Выносим общий множитель, складываем подобные слагаемые	$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

**Замечание:**

Если перед скобкой стоит знак минус, его можно рассматривать как минус единицу, поэтому при раскрытии скобок знак каждого слагаемого изменится на противоположный.

## Упражнения

**3.1**  $3(x + 2) = 2x + 7$

**3.2**  $4(x - 1) = 3x + 2$

**3.3**  $2(2x + 3) = 3x + 8$

**3.4**  $5(x - 2) = 4x + 3$

**3.5**  $3(2x + 1) = 4x + 5$

**3.6**  $4(x + 3) = 5x + 7$

**3.7**  $2(3x - 1) = 5x + 1$

**3.8**  $5(x + 2) = 3(2x + 1)$

**3.9**  $4(3x + 1) = 5(2x + 2)$

**3.10**  $5(2x + 1) = 3(3x + 4)$

**3.11**  $3(x + 4) - 2x = 2(x + 5)$

**3.12**  $5(x - 3) + 2x = 4(2x - 4)$

**3.13**  $3(4x - 2) = 2(5x + 1) + 4$

**3.14**  $4(3x + 2) - 8 = 5(2x + 1) + 3$

**3.15**  $2(5x - 3) + 4 = 3(3x + 2) + 1$

**3.16** На двух полках стоят 48 книг. На одной полке в 3 раза больше книг, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?

- 3.17** Катя и Саша собрали вместе 60 яблок. Маша собрала в 4 раза больше яблок, чем Петя. Сколько яблок собрал каждый из них?
- 3.18** Два брата, Дима и Андрей, вместе съели 35 конфет. Дима съел в 6 раз больше конфет, чем Андрей. Сколько конфет съел каждый мальчик?
- 3.19** В двух корзинах всего 72 гриба. В первой корзине в 5 раз больше грибов, чем во второй. Сколько грибов в каждой корзине?
- 3.20** На двух грядках растёт 56 морковок. На первой грядке в 7 раз больше морковок, чем на второй. Сколько морковок на каждой грядке?
- 3.21** У Жени и Тани вместе 80 наклеек. У Ани в 9 раз больше наклеек, чем у Бори. Сколько наклеек у каждого ребенка?
- 3.22** Два друга, Коля и Вася, поймали 40 рыбок. Коля поймал в 3 раза больше рыбок, чем Вася. Сколько рыбок поймал каждый из них?
- 3.23** В двух классах учится 63 ученика. В одном классе в 2 раза больше учеников, чем в другом. Сколько учеников в каждом классе?
- 3.24** У мамы и дочки вместе 45 открыток. У мамы в 4 раза больше открыток, чем у дочки. Сколько открыток у каждой из них?
- 3.25** Два друга, Иван и Сергей, собрали вместе 36 игрушек. Иван собрал в 5 раз больше игрушек, чем Сергей. Сколько игрушек собрал каждый из них?
- 3.26** Маша и Петя вместе делают 48 бумажных самолётиков за час. Маша делает в 3 раза больше самолётиков, чем Петя. Сколько самолётиков сделает каждый из них, если они работают 2 часа?
- 3.27** Два велосипедиста выехали одновременно из двух посёлков навстречу друг другу. Расстояние между посёлками 60 км. Один велосипедист едет в 4 раза быстрее другого. Какое расстояние проедет каждый велосипедист до встречи?
- 3.28** В двух мешках всего 72 кг муки. В первом мешке в 5 раз больше муки, чем во втором. Сколько муки осталось в каждом мешке, когда из каждого мешка отсыпали по 2 кг?
- 3.29** На двух грядках посадили 56 луковиц тюльпанов. На первой грядке в 7 раз больше луковиц, чем на второй. Сколько луковиц на каждой грядке, если известно, что с каждой грядки собрали по 5 увядших цветков?

- 3.30** У Ани и Бори вместе 80 см ленты. У Ани лента в 9 раз длиннее, чем у Бори. Сколько сантиметров ленты будет у каждого ребенка, когда Аня отдаст Боре 2 см?
- 3.31** Два поезда выехали одновременно из двух городов навстречу друг другу. Общая скорость поездов 120 км/ч. Один поезд едет в 3 раза быстрее другого. Сколько километров пройдёт каждый поезд за 3 часа?
- 3.32** В двух коробках лежит 45 карандашей. В первой коробке карандашей в 4 раза больше, чем во второй. Сколько карандашей станет в каждой коробке, если во вторую коробку положить ещё 3 карандаша?
- 3.33** Два пешехода вышли одновременно из разных концов аллеи длиной 36 метров навстречу друг другу. Один идёт в 5 раз медленнее другого. Сколько метров пройдёт каждый пешеход до встречи?
- 3.34** В двух бидонах 54 литра молока. В первом бидоне в 2 раза больше молока, чем во втором. Сколько литров молока будет в каждом бидоне, если из первого бидона вылить 5 литров молока?
- 3.35** На диване спят кошки. У них лап на 18 больше, чем ушей. Сколько кошек спит на диване?
- 3.36** В вольере сидят собаки. У них лап на 30 больше, чем хвостов. Сколько собак в вольере?
- 3.37** Во дворе греются на солнышке кошки. Если пересчитать все их уши и лапы, то окажется, что лап на 12 больше. Сколько кошек во дворе?
- 3.38** На соревнованиях выступают собаки. Количество их лап на 21 больше, чем количество хвостов. Сколько собак выступает?
- 3.39** На морском дне отдыхают осьминоги. У них щупалец на 42 больше, чем голов. Сколько осьминогов на дне?
- 3.40** По тропинке путешествовали сороконожки. У них ног на 190 больше, чем глаз. Сколько сороконожек было на тропинке?
- 3.41** Аквалангист посчитал у стаи осьминогов головы и щупальца. Щупалец оказалось на 56 больше. Сколько осьминогов в стае?
- 3.42** По кухне бегают тараканы. У них лап на 28 больше, чем усов. Сколько тараканов на кухне?
- 3.43** Ученик на уроке биологии рассматривал сороконожек. Он заметил, что всего ног у них на 152 больше, чем глаз. Сколько сороконожек рассматривал ученик?

**3.44** В старом подвале живут тараканы. Если посчитать все их лапы и усы, то лап окажется на 44 больше. Сколько тараканов в подвале?

# Уравнения с дробными коэффициентами

## Особенности языка в главе

Необходимо знать, что такое дроби и как с ними работать.

Для решения уравнений введём следующие понятия:

Делитель числа — число, которое делит данное число без остатка. К примеру, 2 является делителем 10, так как  $10 : 2 = 5$ .

Кратное числа — число, которое делится на данное число без остатка. К примеру, 10 является кратным 2, так как  $10 : 2 = 5$ .

НОК (наименьшее общее кратное) — наименьшее натуральное число, которое делится на данные числа. В приложении 1 представлен один из возможных вариантов нахождения НОК чисел.

## Уравнения с дробными коэффициентами

Если в уравнении присутствуют дробные коэффициенты, можно умножить обе части уравнения на одно и то же число, чтобы избавиться от знаменателей, не утруждая себя работой с дробями. Разберём на примере:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 5$$

Здесь есть знаменатель 3, от которого мы избавимся умножением обеих частей на 3:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 5 & \quad | \cdot 3 \\ 3 \cdot \left( \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right) & = 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Раскроем скобки:

$$\frac{3}{3}x + \frac{3 \cdot 2}{3} = 15$$

Сократим дроби, используя их основное свойство:

$$\begin{aligned} x + 2 & = 15 \\ x & = 15 - 2 \\ x & = 13 \end{aligned}$$

**Чтобы избавиться от знаменателя, нужно умножить обе части уравнения на число, кратное знаменателю.** Чем меньше кратное, тем лучше. Если знаменатели одинаковые, как в примере выше, желательно умножать на него. Если знаменатели разные, как показано в примере ниже, желательно умножать на НОК знаменателей:

$$\frac{1}{3}x + \frac{4}{15} = \frac{12}{25}$$

НОК(3; 15; 25) = 75. Умножим обе части на это число:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{4}{15} &= \frac{12}{25} \quad | \cdot 75 \\ 75 \cdot \left( \frac{1}{3}x + \frac{4}{15} \right) &= 75 \cdot \frac{12}{25} \\ \frac{75}{3}x + \frac{75 \cdot 4}{15} &= \frac{75 \cdot 12}{25} \end{aligned}$$

$$25x + 20 = 36$$

$$25x = 36 - 20$$

$$25x = 16$$

$$x = \frac{16}{25}$$

**Алгоритм решения уравнений с дробями:**

1. **Найди все знаменатели** в уравнении.
2. **Вычисли НОК** этих знаменателей.
3. **Умножь каждое слагаемое** уравнения (и слева, и справа от знака равно!) на этот НОК. Запиши это действие вертикальной чертой.
4. **Сократи все дроби.** У тебя должно получиться уравнение без знаменателей.
5. **Реши полученное уравнение** известными методами (раскрыть скобки, привести подобные и т.д.).
6. **Запиши ответ.**

## Упражнения

$$4.1 \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 2$$

$$4.2 \quad \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

$$4.3 \quad \frac{5}{6}x + \frac{2}{9} = \frac{7}{18}$$

$$4.4 \quad \frac{3}{8}x - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$$

$$4.5 \quad \frac{7}{10}x + \frac{3}{5} = \frac{11}{15}$$

$$4.6 \quad \frac{4}{9}x - \frac{2}{7} = \frac{5}{21}$$

$$4.7 \quad \frac{5}{12}x + \frac{3}{8} = \frac{7}{6}$$

$$4.8 \quad \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$$

$$4.9 \quad \frac{3}{5}x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}x - \frac{7}{30}$$

$$4.10 \quad \frac{4}{7}x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}x + \frac{11}{35}$$

$$4.11 \quad \frac{5}{8}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{5}{12}$$

$$4.12 \quad \frac{7}{9}x - \frac{3}{4} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{18}$$

$$4.13 \quad \frac{2}{5}x + \frac{2}{15} = \frac{3}{4}$$

4.14  $\frac{3}{7}x - \frac{6}{35} = \frac{4}{9}$

4.15  $\frac{5}{3}x - \frac{5}{24} = \frac{7}{12}$

4.16 Пифагор, спрашивая учеников об их занятиях, получил ответ: "Половина изучает математику, четверть - природу, седьмая часть пребывает в молчаливом размышлении, и, кроме того, есть ещё три ученика". Сколько всего учеников было у Пифагора?

4.17 Рой пчёл появился у цветков лотоса. Пятая часть всего роя села на один цветок, треть - на другой. Утроенная разность этих двух чисел полетела к цветку кутаджа, и осталась ещё одна пчела, которая летала в воздухе, привлечённая благоуханием жасмина и пандануса. Сколько всего было пчёл?

4.18 Надгробная надпись гласила: "Путник! Здесь прах погребён Диофанта. И числа поведать могут, диво, сколь долгод был век его жизни. Часть шестую её составило детство прекрасное. Двенадцатая часть протекла ещё жизни - покрылся потом пухом тогда подбородок. Седьмую в бездетном браке провёл Диофант. Прошло пятилетье, он был осчастливлен рождением сына прекрасного. Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой дал на земле по сравнению с отцом. И в печали глубокой Диофант пережил утрату, проживши года четыре с тех пор, как сына лишился. Скажи, сколько лет жизни достигнув, смерть восприял Диофант?"

4.19 Византийский купец привёз на продажу партию шёлка. В первый день он продал половину всего товара и ещё пол-отреза. Во второй день - половину остатка и ещё пол-отреза. В третий день он продал половину нового остатка и последние пол-отреза, после чего весь шёлк был распродан. Сколько отрезков шёлка было у купца изначально?

4.20 В монастырских амбарах хранилось зерно. На пропитание монахов за зиму израсходовали половину всех запасов. На семена для весеннего сева взяли треть от остатка. На милостыню нищим отдали четверть того, что осталось после этого. К началу лета в амбарах осталось ровно 100 мешков зерна. Сколько мешков было изначально?

4.21 Караван верблюдов шёл через пустыню. В первый день пути пало каждое десятое животное. Во второй день - каждое девятое из остав-

шихся. В третий день - каждое восьмое из тех, что выжили. После трёх дней пути в караване осталось 70 верблюдов. Сколько верблюдов было в начале пути?

# Пропорции

В жизни часто встречаются ситуации, когда две величины связаны постоянным отношением: скорость и время, цена и количество, масштаб карты. Эти связи удобно описывать с помощью **пропорций - равенств двух отношений**. Пропорция - это особый вид уравнения с дробями, и решать её мы будем, применяя уже знакомые нам методы. Рассмотрим пропорцию:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Домножим её части, к примеру, на знаменатель левой дроби:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \quad | \cdot b \\ \frac{a \cdot b}{b} = \frac{c \cdot b}{d} \\ a & = \frac{cb}{d} \end{aligned}$$

Домножив обе части на  $b$ , мы перенесли  $b$  по диагонали слева направо снизу вверх. То же самое можно сделать с другими переменными:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \quad | : c \\ \frac{a}{bc} = \frac{1}{d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \quad | \cdot d \\ \frac{ad}{b} = c \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \quad | : a \\ \frac{1}{b} = \frac{c}{ad} \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем переносить по диагоналям числа в пропорции, сохраняя знак равенства. Это правило называется "правилом пере-

крёстного умножения". В частности, можно записать так:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad | \cdot bd \iff ad = bc$$

Это **основное свойство пропорции**

Если в пропорции есть переменная, необходимо смотреть, где она находится. Если переменная находится в знаменателе, она не может равняться нулю, так как на ноль делить нельзя. Данное ограничение сужает **область допустимых значений (ОДЗ)** переменной.

Пропорции обычно решаются через основное свойство пропорции. Приведу пример:

$$\begin{aligned}\frac{6(2x + 3)}{7} &= \frac{9(x - 1)}{5} \\ 5 \cdot 6(2x + 3) &= 7 \cdot 9(x - 1) \\ 30(2x + 3) &= 63(x - 1) \\ 60x + 90 &= 63x - 63 \\ 90 + 63 &= 63x - 60x \\ 153 &= 3x \\ x &= 51\end{aligned}$$

## Прямая и обратная пропорциональность

Две величины называются **прямо пропорциональными**, если при увеличении одной в несколько раз другая увеличивается во столько же раз. Их отношение постоянно:

$$\frac{y}{x} = k \iff y = kx.$$

**Пример:** Количество товара и его стоимость (при постоянной цене).

Две величины называются **обратно пропорциональными**, если при увеличении одной в несколько раз другая уменьшается во столько же раз. Их произведение постоянно:

$$x \cdot y = k \iff y = \frac{k}{x}.$$

**Пример:** Скорость движения и время на преодоление одного и того же расстояния.

В задачах важно правильно определить тип пропорциональности, чтобы составить верную пропорцию.

## Упражнения

$$5.1 \quad \frac{x}{4} = \frac{3}{6}$$

$$5.2 \quad \frac{3}{7} = \frac{x}{14}$$

$$5.3 \quad \frac{2.5}{x} = \frac{5}{8}$$

$$5.4 \quad \frac{x+2}{5} = \frac{4}{10}$$

$$5.5 \quad \frac{x}{x+4} = \frac{3}{7}$$

$$5.6 \quad \frac{x}{x+5} = \frac{2}{9}$$

$$5.7 \quad \frac{2x}{x+7} = \frac{3}{10}$$

$$5.8 \quad \frac{5}{x+1} = \frac{10}{7}$$

$$5.9 \quad \frac{8}{2x-3} = \frac{4}{x}$$

$$5.10 \quad \frac{\frac{2}{3}}{x} = \frac{5}{\frac{4}{7}}$$

$$5.11 \quad \frac{2x-1}{3} = \frac{x+4}{5}$$

$$5.12 \quad \frac{6}{x-2} = \frac{9}{x+1}$$

$$5.13 \quad \frac{3(x-2)}{4} = \frac{2(x+1)}{5}$$

$$5.14 \quad \frac{2x-3}{x+1} = \frac{4}{5}$$

$$5.15 \quad \frac{5}{2x-1} = \frac{3}{x+2}$$

**5.16**  $\frac{4(x+1)}{3} = \frac{5(x-2)}{2}$

**5.17**  $\frac{5(x-4)}{2} = \frac{3(x+2)}{8}$

- 5.18** Для приготовления 10 пирожков требуется 300 грамм муки. Сколько грамм муки потребуется для приготовления 25 таких же пирожков?
- 5.19** Автомобиль проехал 240 км, израсходовав 20 литров бензина. Сколько литров бензина потребуется для поездки на расстояние 360 км при тех же условиях?
- 5.20** Из 5 кг свежих яблок получается 800 грамм сушеных. Сколько килограммов свежих яблок потребуется, чтобы получить 2 кг сушеных?
- 5.21** Рабочий изготовил 12 деталей за 3 часа. Сколько деталей изготовит этот рабочий за 8 часов, работая с той же производительностью?
- 5.22** На карте, масштаб которой 1:200000, расстояние между двумя городами равно 5 см. Каково расстояние между этими городами на местности (в километрах)?
- 5.23** Для приготовления 8 порций овсяного печенья требуется 200г овсяных хлопьев. Сколько граммов овсяных хлопьев потребуется для приготовления 12 порций такого печенья?
- 5.24** Бригада из 5 каменщиков может построить стену за 12 дней. За сколько дней построит эту же стену бригада из 8 каменщиков (при одинаковой производительности)?
- 5.25** На карте масштаба 1:500000 расстояние между двумя городами равно 8 см. Каково реальное расстояние между этими городами в километрах?
- 5.26** Курс обмена валюты: 85 рублей за 1 доллар. Сколько рублей можно получить за 250 долларов по этому курсу?
- 5.27** Для приготовления раствора на 4 части кислоты берут 15 частей воды. Сколько граммов кислоты потребуется для приготовления 380 г такого раствора?
- 5.28** Из 5 м ткани можно сшить 3 одинаковых платья. Сколько таких платьев можно сшить из 27 м этой же ткани?

- 5.29** С 3 га поля собрали 42 т картофеля. Сколько тонн картофеля соберут с 7 га при такой же урожайности?
- 5.30** Принтер печатает 120 страниц за 4 минуты. За какое время этот принтер напечатает 210 страниц?
- 5.31** Автомобиль проезжает 180 км, расходуя 15 л бензина. Сколько литров бензина потребуется этому автомобилю, чтобы проехать 300 км при таком же расходе?
- 5.32** Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 250 мг 3 раза в день в течение 7 дней. В одной упаковке лекарства содержится 20 таблеток по 125 мг. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?
- 5.33** Если 8 рабочих выполняют работу за 15 дней, за сколько дней выполнят эту же работу 12 рабочих?
- 5.34** Велосипедист проезжает маршрут со скоростью 12 км/ч за 4 часа. За какое время он проедет этот же маршрут со скоростью 16 км/ч?
- 5.35** Для заполнения бассейна через одну трубу требуется 6 часов. За сколько часов заполнится бассейн через две такие же трубы, работающие одновременно?
- 5.36** Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 км при скорости 80 км/ч. Сколько литров он израсходует на 100 км при скорости 100 км/ч, если расход обратно пропорционален скорости?
- 5.37** На складе есть запас продуктов на 30 дней для 200 человек. На сколько дней хватит этого запаса для 250 человек?
- 5.38** Три насоса откачивают воду из котлована за 8 часов. За сколько часов откачают воду 4 таких же насоса?
- 5.39** Если 6 комбайнов убирают поле за 10 дней, сколько нужно комбайнов, чтобы убрать это же поле за 8 дней?
- 5.40** Шестерня с 20 зубьями делает 60 оборотов в минуту. Сколько оборотов в минуту будет делать сцепленная с ней шестерня с 30 зубьями?
- 5.41** При постоянной мощности время работы батарейки обратно пропорционально току. Если при токе 0.5 А батарейка работает 20 часов, сколько она проработает при токе 0.8 А?

# Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

Система линейных уравнений с двумя неизвестными представляет собой два уравнения с двумя неизвестными. Слово "система" означает, что два уравнения должны быть истинными. Рассмотрим её общий вид:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$
 Здесь  $a, b, c, d, e, f$  будут числами, а  $x$  и  $y$  будут переменными, значения которых надо найти.

## Допустимые преобразования систем

С системой уравнений можно выполнять три типа равносильных преобразований, которые не меняют её решения.

### 1. Перестановка уравнений

**Правило:** Уравнения в системе можно менять местами.

**Обоснование:** Порядок условий не важен — важно, чтобы они выполнялись *одновременно*.

**Пример:**

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x + y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + y = 6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

### 2. Применение равносильных преобразований к каждому уравнению системы в отдельности

**Правило:** К обеим частям любого уравнения в системе можно применить равносильное преобразование.

**Обоснование:** Это равносильное преобразование для отдельного уравнения. Поскольку в системе условия должны выполняться вместе, преобразование одного из них не нарушает общую логику.

**Пример:** Умножим первое уравнение системы на 2:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x + y = 6 \end{cases} \cdot 2 \iff \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$$

Здесь использован знак равносильности  $\iff$ , так как преобразование сохраняет множество решений.

### 3. Сложение или вычитание уравнений

**Правило:** К любому уравнению системы можно прибавить (или вычесть) другое уравнение этой системы, заменив исходное уравнение на результат.

**Обоснование:** Это следствие из однозначности сложения и вычитания:

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \implies a + c = b + d$$

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \implies a - c = b - d$$

**Пример:** Вычтем из второго уравнения первое:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x + y = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y = 5 \\ (4x + y) - (x + 2y) = 6 - 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

**Важное замечание:** Уравнение, которое не подвергалось преобразованию, обязательно переписывается в новую систему без изменений.

Все три преобразования являются **равносильными**: они сохраняют множество решений системы. Именно эти операции составляют основу методов решения систем линейных уравнений.

### Количество решений системы

Система двух линейных уравнений может иметь три принципиально различных случая:

#### Случай 1. Нет решений (несовместная система)

**Когда возникает:** Когда уравнения противоречат друг другу.

**Пример:**

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Одно и то же выражение  $x + y$  не может одновременно равняться двум разным числам (1 и 2). Значит, решений нет.

**Как распознать:** После преобразований получается равенство, где слева и справа стоят разные числа (например,  $0 = 5$ ).

### Случай 2. Одно решение (определённая система)

**Когда возникает:** Когда уравнения задают две пересекающиеся прямые.

**Пример:**

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:  $x = 2, y = 1$ .

**Как распознать:** В процессе решения вы находите конкретные значения для  $x$  и  $y$ .

### Случай 3. Бесконечно много решений (неопределённая система)

**Когда возникает:** Когда оба уравнения описывают одну и ту же прямую (пропорциональны).

**Пример:**

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Второе уравнение получается из первого умножением на 2. Это фактически одно уравнение, поэтому решений бесконечно много: любая пара чисел  $(t, 1 - t)$ , где  $t$  — любое число.

**Как распознать:** После преобразований получается тождество (например,  $0 = 0$ ).

**Геометрический смысл:** Каждое уравнение системы задаёт прямую на плоскости.

**0 решений:** прямые параллельны, но не совпадают.

**1 решение:** прямые пересекаются.

**$\infty$  решений:** прямые совпадают.

## Решение системы уравнений с двумя неизвестными

**Решить систему** — значит найти все пары чисел  $(x, y)$ , которые обращают каждое уравнение системы в верное равенство **одновременно**. Такая

пара называется **упорядоченной**: на первом месте всегда стоит значение  $x$ , на втором — значение  $y$ .

### Пример

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Можно заметить, что пара чисел  $x = 2$ ,  $y = 1$  удовлетворяет обоим уравнениям:

$$\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Поэтому **решением** системы является упорядоченная пара  $(2; 1)$ .

**Важно:** порядок записи имеет значение. Пара  $(1; 2)$  не является решением, так как не удовлетворяет второму уравнению ( $1 - 2 = -1 \neq 1$ ). Есть два способа решения систем линейных уравнений. Первый заключается в совершении действий над строками. Второй заключается в выражении одной переменной через другую. Суть обоих способов в создании уравнения с одной переменной, методы решения которого уже известны.

## Метод сложения (исключения)

Основная идея метода - преобразовать систему так, чтобы одна из переменных исключилась при сложении или вычитании уравнений. Для этого коэффициенты при одной из переменных делают противоположными или одинаковыми.

### Алгоритм

**Шаг 1. Выберите переменную для исключения.**

**Шаг 2. Уравняйте модули коэффициентов** при этой переменной, умножив каждое уравнение на подходящее число.

**Шаг 3. Сложите или вычтите уравнения**, чтобы исключить выбранную переменную:

- Если коэффициенты **одинаковые** — вычитайте.
- Если коэффициенты **противоположные** — складывайте.

**Шаг 4. Решите полученное уравнение** с одной переменной.

**Шаг 5. Подставьте найденное значение** в любое из исходных уравнений и найдите вторую переменную.

**Шаг 6.** Запишите ответ в виде  $(x; y)$  и выполните проверку.

$$\begin{cases} 12x + 5y = 27 \\ 8x + 7y = 29 \end{cases}$$

Допустим, я хочу избавиться от  $x$  в одной из строчек. Для этого мне надо сделать одинаковый коэффициент при  $x$ . Это число должно быть кратным 12 и 8. Чтобы не умножать на большие числа, я возьму НОК(12; 8)=24. Тогда первую строчку умножу на 2, а вторую - на 3:

$$\begin{cases} 12x + 5y = 27 | \cdot 2 \\ 8x + 7y = 29 | \cdot 3 \\ 24x + 10y = 54 \\ 24x + 21y = 87 \end{cases}$$

Теперь вычту из второй строки первую:

$$\begin{cases} 24x + 10y = 54 \\ 24x + 21y - (24x + 10y) = 87 - 54 \\ 24x + 6y = 42 \\ 11y = 33 \end{cases}$$

Из второго уравнения легко найти  $y$ :

$$\begin{cases} 24x + 6y = 42 \\ y = 3 \end{cases}$$

Так как это система уравнений, то  $y$  и в первой, и во второй строчке один и тот же, поэтому вместо  $y$  в первой строчке можно подставить его значение из второй:

$$\begin{cases} 24x + 6 \cdot 3 = 42 \\ y = 3 \end{cases}$$

Дальше найти  $x$  довольно легко. Чтобы не увеличивать объём книги, сразу напишу ответ:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{или } (1; 3)$$

## Метод подстановки

Метод подстановки основан на том, чтобы найти в одном из уравнений, чему равна одна переменная (например,  $x$ ) через другую (например,  $y$ ), а затем подставить это выражение во второе уравнение.

Выразить переменную — значит преобразовать уравнение так, чтобы эта переменная осталась одна в левой части равенства, а в правой части было выражение, содержащее только другую переменную и числа.

Например, из уравнения  $2x + y = 5$  можно выразить  $y$ :

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 & | - 2x \\ y &= 5 - 2x \end{aligned}$$

**Шаг 1. Выразите одну переменную через другую:** Выберите более простое уравнение. Преобразуйте его так, чтобы одна переменная осталась одна в левой части, а в правой — выражение с другой переменной.

**Шаг 2. Подставьте полученное выражение:** Во второе уравнение вместо только что выраженной переменной подставьте целое выражение, которое у вас получилось. Теперь второе уравнение будет содержать только одну переменную.

**Шаг 3. Решите полученное уравнение:** Найдите значение оставшейся переменной.

**Шаг 4. Найдите вторую переменную:** Подставьте найденное число в выражение, полученное на первом шаге, и вычислите значение второй переменной.

**Шаг 5. Запишите ответ и проверьте:** Запишите решение в виде  $(x; y)$ . Подставьте оба числа в исходные уравнения, чтобы убедиться, что они верны.

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

**Шаг 1. Выбор уравнения для выражения:** Второе уравнение проще, коэффициент при  $x$  равен 1, поэтому выразим  $x$  через  $y$ :

$$x - y = 1 \quad \iff \quad x = 1 + y$$

**Шаг 2. Подстановка:** Подставляем  $1 + y$  вместо  $x$  в первое уравнение:

$$2(1 + y) + 3y = 12$$

**Шаг 3. Решение уравнения:**

$$\begin{aligned} 2 + 2y + 3y &= 12 \\ 2 + 5y &= 12 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

**Шаг 4. Нахождение второй переменной:** Подставляем  $y = 2$  в выражение для  $x$ :

$$x = 1 + 2 = 3$$

**Шаг 5. Ответ:**  $(3; 2)$

**Шаг 6. Проверка:**

$$1) 2x + 3y = 12 : \quad 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12 \quad \checkmark$$

$$2) x - y = 1 : \quad 3 - 2 = 1 \quad \checkmark$$

**Замечание:** В этом примере мы выбрали для выражения уравнение  $x - y = 1$ , так как в нём коэффициент при  $x$  равен 1. Если бы мы выражали из первого уравнения, получились бы дроби:  $x = \frac{12 - 3y}{2}$ . Метод подстановки всё равно привёл бы к правильному ответу, но вычисления были бы сложнее.

**Какой метод выбрать: сложения или подстановки?**

Оба метода всегда приводят к правильному ответу, но в разных ситуациях один из них может быть удобнее. Выбор метода помогает сократить вычисления и избежать ошибок.

Метод сложения (исключения)	Метод подстановки
<p><b>Когда удобен:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Коэффициенты при одной переменной уже противоположны или одинаковы.</li> <li>2. Коэффициенты при одной переменной легко сделать противоположными/одинаковыми (кратны друг другу).</li> </ol>	<p><b>Когда удобен:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Одно уравнение уже разрешено относительно переменной (например, <math>y = 2x + 3</math>).</li> <li>2. В одном уравнении коэффициент при переменной равен 1 или <math>-1</math>.</li> </ol>
<p><b>Преимущества:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Часто требует меньше преобразований.</li> <li>• Хорошо работает, когда коэффициенты неудобны для выражения.</li> <li>• Позволяет избежать выражений с дробями на первом шаге.</li> </ul>	<p><b>Преимущества:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Более прямолинейный и понятный.</li> <li>• Не требует уравнивания коэффициентов.</li> <li>• Естественен, когда одна переменная уже выражена.</li> </ul>
<p><b>Недостатки:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Нужно аккуратно подбирать множители.</li> <li>• Легко ошибиться в знаках при сложении/вычитании.</li> <li>• Требует понимания, когда складывать, а когда вычитать.</li> </ul>	<p><b>Недостатки:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Может привести к громоздким выражениям с дробями.</li> <li>• Если коэффициенты большие, вычисления могут быть сложными.</li> <li>• При подстановке легко потерять знак или скобку.</li> </ul>

### Универсальная рекомендация

1. Сначала посмотрите, нет ли в системе уже выраженной переменной или коэффициента  $\pm 1$  — если есть, используйте подстановку.
2. Если коэффициенты при одной переменной кратны друг другу - используйте сложение.
3. Если сомневаетесь - попробуйте оба метода на черновике и выберите более простой путь.

### Упражнения

6.1 
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$6.2 \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$6.3 \begin{cases} x + 3y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$6.4 \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$6.5 \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

**6.6** Два туриста вышли одновременно из двух городов, расстояние между которыми 48 км, и пошли навстречу друг другу. Через 6 часов они встретились. Если бы первый турист вышел на 1 час раньше второго, то они встретились бы через 5 часов. Найдите скорость каждого туриста.

**6.7** Смешали два сорта конфет: первый сорт по цене 120 рублей за килограмм, а второй - по цене 180 рублей за килограмм. Получилось 4 кг смеси, которая стоит 144 рубля за килограмм. Сколько килограммов конфет каждого сорта взяли для смеси?

**6.8** Лодка прошла 15 км по течению реки и 8 км против течения, затратив на весь путь 2 часа. Если бы лодка прошла 20 км по течению и 6 км против течения, то затратила бы 2 часа 40 минут. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

**6.9** Мастер и ученик, работая вместе, могут выполнить заказ за 8 часов. Если мастер проработает 3 часа, а ученик 12 часов, то будет выполнено 75% всего заказа. За сколько часов мастер и ученик могут выполнить заказ, работая по отдельности?

**6.10** Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 24 км, одновременно выехали два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста на 2 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл в пункт В на 1 час раньше. Найдите скорость каждого велосипедиста.

**6.11** Имеются два сосуда, содержащие 4 кг и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 57% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

- 6.12** Имеются два сосуда, содержащие 40 кг и 30 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 73% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 72% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?
- 6.13** Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?
- 6.14** Имеются два сосуда, содержащие 12 кг и 8 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 65% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится во втором растворе?
- 6.15** Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 42 кг раствора кислот различной концентрации. Если слить их вместе, то получим раствор, содержащий 40% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 37% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится во втором растворе?

# Приложение 1. Как искать НОК чисел

Существует несколько способов найти НОК чисел, здесь будет разобран, на мой взгляд, самый универсальный. Чтобы им пользоваться, надо знать, что такое простые числа и степень числа. Разберём сразу на примере, как находить НОК чисел. Найдём НОК(24; 36; 45).

Первый шаг - разложить числа на простые множители:

$$24 = 2^3 \cdot 3^1$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$45 = 3^2 \cdot 5^1$$

Дальше сделаем таблицу, где мы отразим результаты разложения чисел на простые множители: в первой строке будут сами числа. В первом столбце будут все простые числа, а в ячейках будет степень, которая была у каждого из чисел при разложении 24; 36; 45 на простые множители:

	24	36	45
2	3	2	0
3	1	2	2
5	0	0	1

Теперь отметим в каждой строке ячейку с наибольшим числом, не считая первую строку и первый столбец. Это будет максимальная степень каждого простого числа в разложении на простые множители:

	24	36	45
2	3	2	0
3	1	2	2
5	0	0	1

Таким образом,  $\text{НОК}(24; 36; 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$